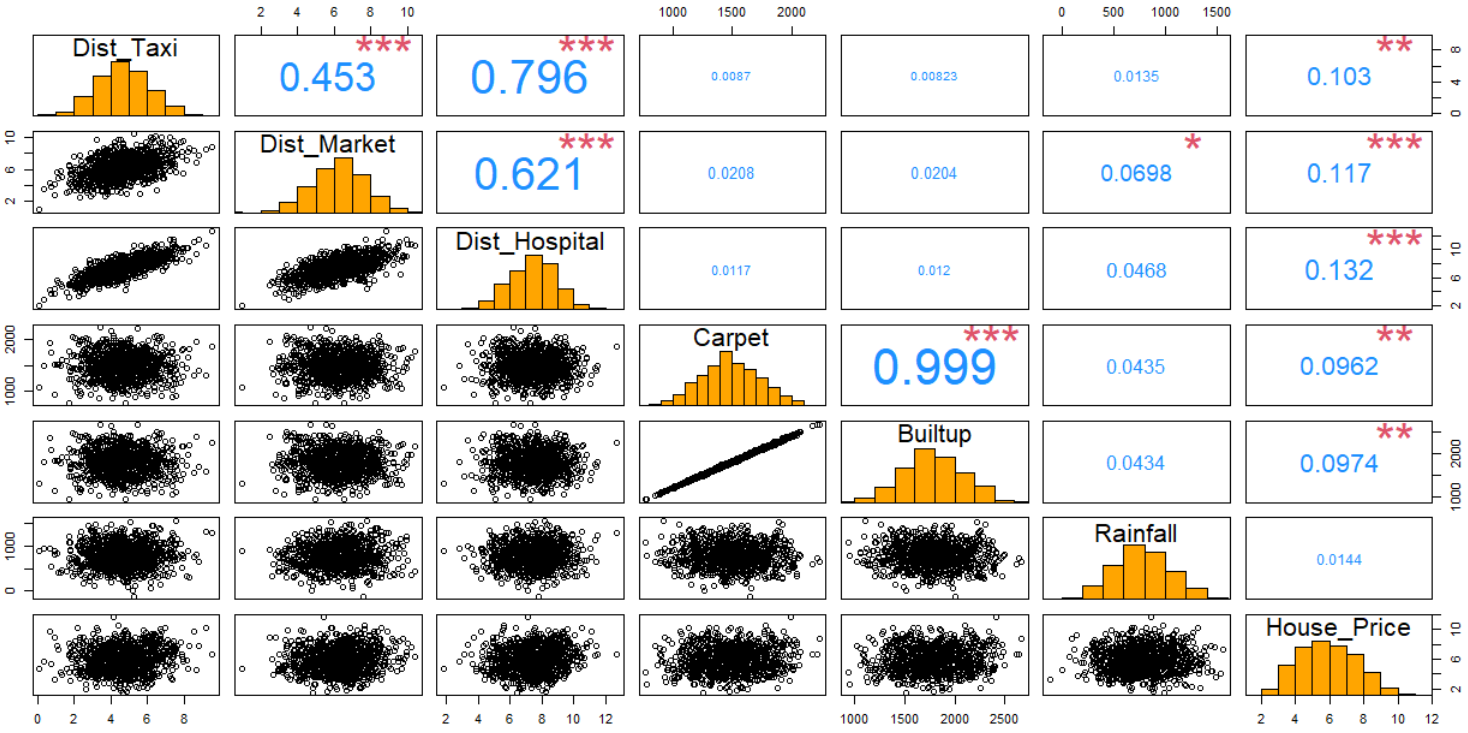
שאלה מספר 2 (5 סעיפים ו-32 נקודות)

soldByeBuyHome הוא אתר רישום נכסים המאגד נכסים מוכנים לקנייה ומחיריהם ברחבי המדינה. זוהי הזדמנות טובה עבור משקיעי נכסים לזהות נכסים הנמכרים במחיר "נמוך". השאלה היא איך לזהות אם הנכס המתומחר במחיר נמוך יותר ממחיר מהשוק?

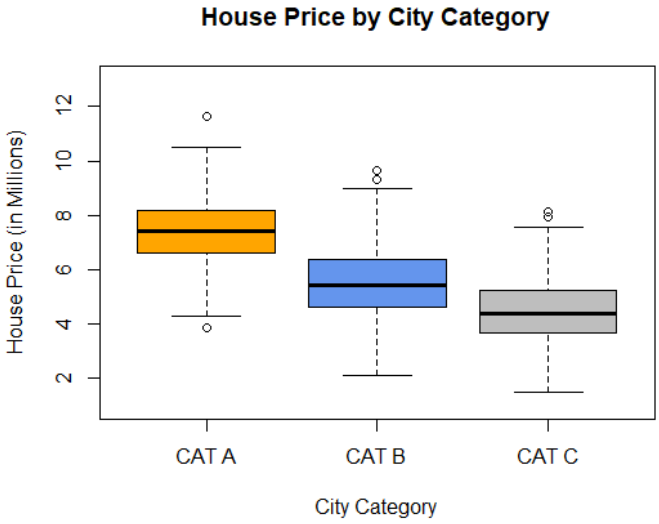
יועצים לניתוח נתונים לחברת השקעות צברו נתונים עבור הנכסים שנמכרו החודש יחד עם התכונות של הנכסים הללו. קובץ הנתונים שבידם מכיל את המשתנים הבאים:

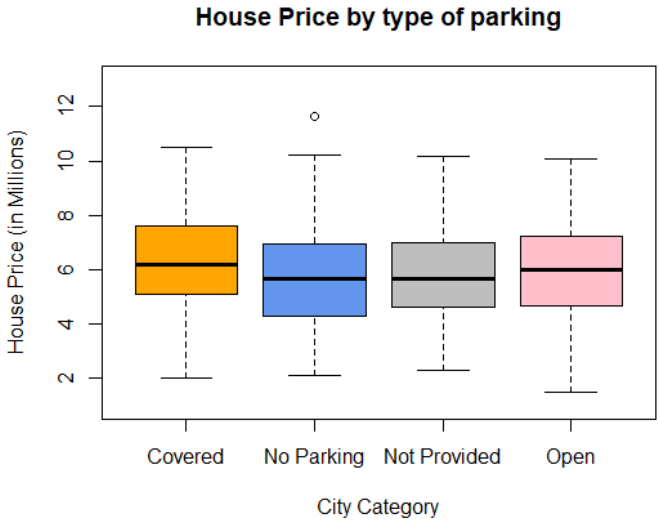
Dist_Taxi – מרחק לתחנת המוניות הקרובה מהנכס במיילים
Dist_Market - מרחק לשוק המכולת הקרוב ביותר מהנכס במיילים
Dist_Hospital - מרחק לבית החולים הקרוב ביותר מהנכס במיילים
Carpet - שטח השטיח של הנכס ברגל בריבוע
Builtup - שטח הבנוי של הנכס ברגל בריבוע
Parking - סוג חניה לרכב זמין עם הנכס, Covered, Not Provided, No Parking ו-Open
City_Category - סיווג העיר על פי הגודל, A, B ו-C
Rainfall - גשמים שנתיים באזור בו נמצא הנכס
House_Price- מחיר בו נמכר הנכס (במיליוני דולרים)



מדד VIF עבור המנבאים "הרציפים" השונים – VIF of the various "continuous" predictors

Dist_Taxi	Dist_Market	Dist_Hospital	Carpet	Builtup	Rainfall
2.754537	1.657549	3.574539	451.0221	451.0776	1.014681



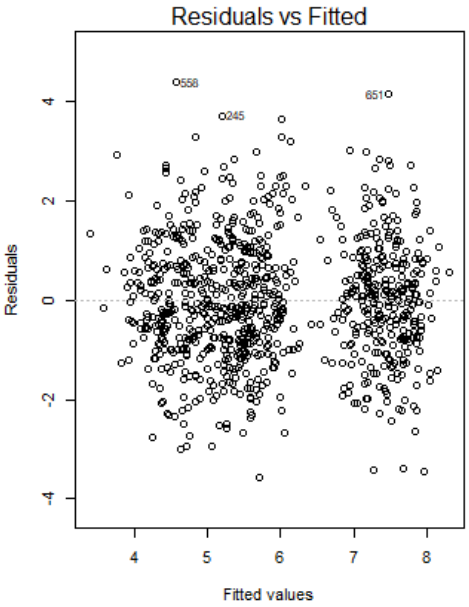


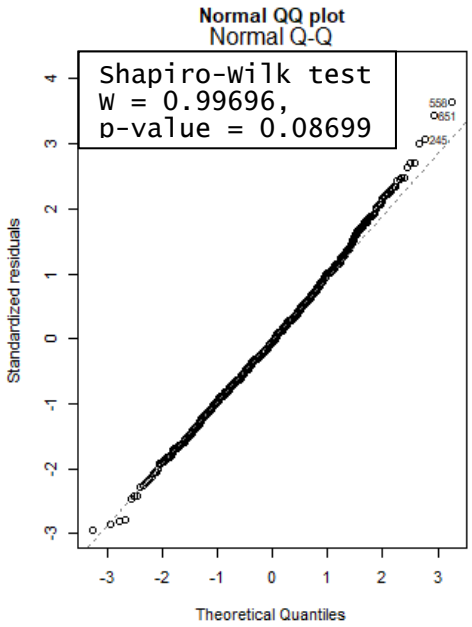
א. (5 נק') מה ניתן ללמוד הפלטים הבאים, על המודל והנחותיו? מה ניתן ללמוד על המולטי קולינאריות בין המנבאים השונים? על הקשר בין המשתנה התלוי למשתנים הבלתי תלויים השונים?

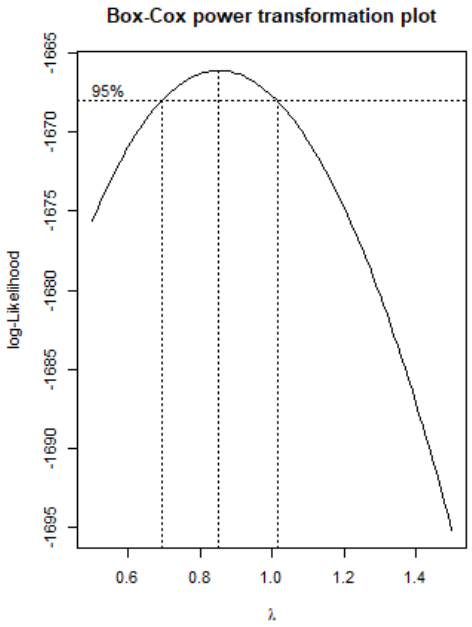
ב. (6 נק') היועצים התאימו את מודל הרגרסיה הבא:

```
lm(House_Price ~ Dist_Taxi + Dist_Market + Dist_Hospital + Carpet +
                 Builtup + Rainfall + Parking + City_Category)
```

וקיבלו את התוצאות הבאות:







```
Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          5.595e+00  3.672e-01  15.235  < 2e-16
Dist_Taxi            5.243e-02  4.721e-02   1.111   0.2670
Dist_Market          2.102e-02  3.660e-02   0.574   0.5659
Dist_Hospital        8.684e-02  5.293e-02   1.640   0.1013
Carpet              -5.242e-04  3.467e-03  -0.151   0.8799
Builtup              1.107e-03  2.893e-03   0.383   0.7021
Rainfall            -9.953e-05  1.541e-04  -0.646   0.5185
ParkingNo Parking   -6.128e-01  1.387e-01  -4.419 1.11e-05
ParkingNot Provided -4.926e-01  1.235e-01  -3.990 7.16e-05
ParkingOpen         -2.635e-01  1.126e-01  -2.341   0.0194
City_CategoryCAT B  -1.877e+00  9.599e-02 -19.554  < 2e-16
City_CategoryCAT C  -2.895e+00  1.057e-01 -27.380  < 2e-16

Residual standard error: 1.222 on 885 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5014,   Adjusted R-squared:  0.4952
F-statistic: 80.89 on 11 and 885 DF, p-value: < 2.2e-16
```

מה ניתן ללמוד מהפלטים על נחיצות המסבירים, חלקם? כולם? האם התוצאות מפתיעות ביחס לסעיף א' או עולות בקנה אחד עם הממצאים ב-א'? מה ניתן ללמוד על הנחות המודל?

ג. (5 נק') בעקבות הממצאים בשני הסעיפים הקודמים היועצים החליטו להתאים מודל שונה והתלבטו בין רגרסיית PCA ורגרסיית LASSO. מדוע הם עברו לאפיק זה? מה ההבדל בין שתי החלופות? במידה ונרצה גם לעשות גם "בחירת מודל" יחד עם התאמתו, איזו מהחלופות הייתם בוחרים (נמקו)?

ד. (5 נק') היועצים עשו ניתוח גורמים עיקריים (PCA) לששת המשתנים המסבירים הרציפים לאחר שהם תקננו אותם וקבלו את מטריצת מקדמי ההעמסה (מקמי הצירופיים הלינאריים השונים בכל גורם לכל משתנה מקור) הבאים:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6
Dist_Taxi	0.58074	0.01472	-0.09236	0.54195	-0.60024	0.00129
Dist_Market	0.51945	-0.01752	0.04205	-0.81799	-0.24288	-0.00019
Dist_Hospital	0.62409	0.01459	-0.04132	0.16765	0.76190	-0.00109
Carpet	-0.00354	0.70551	0.04505	-0.01301	-0.00631	-0.70711
Builtup	-0.00350	0.70551	0.04516	-0.01395	-0.00411	0.70710
Rainfall	0.05837	-0.06143	0.99193	0.09334	-0.01338	0.00000

מה ניתן ללמוד מטבלת המקדמים על שלושת הרכיבים הראשונים (השוו את המקדמים וסדרי הגודל שלהם), PC1, PC2 ו-PC3?

ה. (6 נק') לאחר ביצוע צעדים לאחור על המודל מסעיף ב' קבלו היועצים את המודל הסופי הבא:

```
lm(House_Price ~ Dist_Hospital + Builtup + Parking + City_Category )

Coefficients:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          5.4941610  0.3350819  16.396  < 2e-16
Dist_Hospital        0.1397312  0.0282390   4.948 8.96e-07
Builtup              0.0006710  0.0001367   4.910 1.08e-06
ParkingNo Parking   -0.6075695  0.1382691  -4.394 1.25e-05
ParkingNot Provided -0.4862575  0.1230867  -3.951 8.42e-05
ParkingOpen         -0.2621869  0.1123965  -2.333   0.0199
City_CategoryCAT B  -1.8773332  0.0955364 -19.650  < 2e-16
City_CategoryCAT C  -2.8917929  0.1054600 -27.421  < 2e-16

Residual standard error: 1.221 on 889 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5003,       Adjusted R-squared:  0.4963
F-statistic: 127.1 on 7 and 889 DF, p-value: < 2.2e-16
```

נתחו את התובנות שניתן ללמוד מהמודל הסופי של סעיף ב' שהובאו בסעיף ו'.

שאלה מספר 3 (שלושה סעיפים ו-20 נקודות)

ויסנטה ועמיתיו (2006) בחנו את הימצאות של זחלים בשלב הראשון (L1) של Elaphostrongylus cervi בצואה של צביים אדומים ברחבי ספרד. החוקרים התמקדו בקשר שבין נוכחותם והיעדרם של זחלים (E. cervi L1) בצבי לבין המשתנים המסבירים אורך ומין המארח. במחקר השתתפו 826 צביים. קובץ הנתונים מכיל את המשתנים הבאים:

fSex - מגדר החיה, 0=זכר, 1=נקבה
Length - אורך החיה בסנטימטרים
cLength - אורך ממורכז = Length-mean (Length)
Ecervi.01 - המשתנה התלוי. 1=יש נוכחות של זחלים 0=אין נוכחות של זחלים

א. (7 נק') החוקרים התלבטו בין שני המודלים הבאים:

מודל Mode 1	מודל Mode 2
$Y_i \mid Length_i, fSex_{is} \sim \mathrm{B}(1, P_{is})$ Define Y_i as 1 if the parasite *E. cervi* L1 is found in deer i, and 0 otherwise. $Length_i$ and $fSex_i$ are the length and sex of the deer i.	$Y_i \mid cLength_i, fSex_i \sim \mathrm{B}(1, P_i)$ Define Y_i as 1 if the parasite *E. cervi* L1 is found in deer i, and 0 otherwise. $cLength_i$ and $fSex_i$ are the centralized length and sex of the deer i.
$\log\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 Length_i + \alpha_2 fSex_i + \alpha_3 Length_i * fSex_i$	$\log\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 cLength_i + \beta_2 fSex_i + \beta_3 cLength_i * fSex_i$

מדוע בחרו בהם? מה ההבדל(ים) בין מודל 1 ל-2? מה הקשר בין הוקטור α לוקטור β?

ב. (6 נק') החוקרים התאימו את סדרת הרגרסיות הלוגיסטיות הבאות:

```
Model 1: Ecervi.01 ~ cLength * factor(fSex)
Model 2: Ecervi.01 ~ cLength + factor(fSex)
Model 3: Ecervi.01 ~ factor(fSex)
Model 4: Ecervi.01 ~ cLength
Model 5: Ecervi.01 ~ 1
```

וקבלו את התוצאות הבאות:

Model	# of parameters	Log(likelihood)	Deviance
1	4	-501.86	1003.72
2	3	-504.06	1008.12
3	2	-531.695	1063.39
4	2	-504.15	1008.3
5	1	-536.565	1073.13

מה רצו לבדוק החוקים בעזרת מודלים אלו? מה תהיה בחירתם?

ג. (7 נק') החוקרים החליטו לעבוד עם

```
glm(formula = Ecervi.01 ~ cLength * factor(fSex), family = binomial)
```

וקבלו את התוצאות הבאות:

```
Coefficients:
                       Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)            0.652409   0.109602   5.953 2.64e-09
cLength                0.025112   0.005576   4.504 6.68e-06
factor(fSex)1          0.163873   0.174235   0.941   0.3469
cLength:factor(fSex)1 0.020109   0.009722   2.068   0.0386

    Null deviance: 1073.1  on 825  degrees of freedom
Residual deviance: 1003.7  on 822  degrees of freedom
AIC: 1011.7
```

מה ניתן ללמוד מפלט זה על שאלות המחקר? השפעת המגדר ואורך החיה על הסיכוי להימצאות הטפיל? רשמו תשובתכם במונחים של odds, log(odds), odds ratio ו-log(odds ratio).

מודלים של רגרסיה לינארית - דף נוסחאות למבחן מסכם

הרגרסיה הפשוטה

המודל: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ כאשר $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ ב"ת.

X_i קבועים ידועים, $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ פרמטרים לא ידועים. Y_i נצפים.

סכומי ריבועים של המשתנים: $SXX = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, SXY = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$

אומדי הריבועים הפחותים: $\hat{\beta}_1 = \frac{SXY}{SXX}, \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$

שונויות האומדים: $Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{SXX}, Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \bar{X}^2 Var(\hat{\beta}_1)$.

התחזיות: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = \bar{Y} + \hat{\beta}_1(X_i - \bar{X})$

סכומי הריבועים במודל: $SST = SSY, SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2, SSE = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$

משוואות הנורמליות:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_i X_i = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right) X_i = 0$$

אח"ה ל- σ^2: $MSE = \frac{SSE}{n-2}$

סטטיסטיים: $F = \frac{SSR}{MSE}$ $t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{MSE / SXX}}, t_{\hat{\beta}_0} = \frac{\hat{\beta}_0}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{SXX}\right)}}$

רווח סמך <u>לתוחלת</u> תצפית חדשה עבורה ערך המשתנה המסביר הוא x_0:

$$\bar{Y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{X}) \pm \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{SXX}\right)} t_{(n-2,1-\alpha/2)}$$

רווח <u>חיזוי</u> לתצפית חדשה עבורה ערך המשתנה המסביר הוא x_0:

$$\bar{Y} + \hat{\beta}_1(x_0 - \bar{X}) \pm \sqrt{MSE\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{SXX}\right)} t_{(n-2,1-\alpha/2)}$$

מודל הרגרסיה המרובה

$Y_i = X_i\beta + \varepsilon_i$ כאשר X_i הוא שורה באורך p.

בכתיבה מטריציונית: $Y = X\beta + \varepsilon$ כאשר $Y \in \Re^n$ וקטור התצפיות, $\beta \in \Re^p$ וקטור המקדמים, $X \in \Re^{n\cdot p}$ מטריצת המשתנים המסבירים ו- $\varepsilon \in \Re^n$ וקטור השגיאות, המקיים אותן הנחות כמו במודל הרגרסיה הפשוטה.

האר"פ $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$. מטריצת השונויות המשותפות של האומדים: $Cov\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2\left(X^T X\right)^{-1}$

וקטור התחזיות: $\hat{Y} = X\hat{\beta}$

סכומי ריבועים: $SST = Y^T Y - n\bar{Y}^2$, $SSR = \hat{Y}^T\hat{Y} - n\bar{Y}^2$, SSE=$\left(Y - \hat{Y}\right)^T\left(Y - \hat{Y}\right)$

הסקה על תוחלת תצפית עתידית $E(Y_0)$ (במודל עם חותך)

הסקה על הרמה הממוצעת של הפרטים המקיימים $\underline{X} = \underline{x}_0$, $\underline{C}^T = \left[1, \underline{x}_0^T\right]$:

סטטיסטי המבחן:

$$t_{st} = \frac{C^T\hat{\beta} - C^T\beta|_{H_0}}{\sqrt{\hat{V}(C^T\hat{\beta})}}$$

$$V(C^T\hat{\beta}) = C^T V(\hat{\beta}) C = \sigma^2 C^T (X^T X)^{-1} C$$

ר"ס ברמת סמך 1-α לתוחלת תצפית עתידית $E(Y_0)$: $E\left(Y_0\right) \in \underline{C}^T\underline{\hat{\beta}} \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}\left(\underline{C}^T\underline{\hat{\beta}}\right)}$

הסקה על תצפית עתידית Y_0 (במודל עם חותך).

נרצה לחזות את התגובה עבור פרט ספציפי אשר ערך המשתנה המסביר שלו הוא $\underline{x}_0$, נשתמש בשארית $e_0 = Y_0 - \hat{Y}_0$ כך ש:

$$t_{st} = \frac{e_0 - 0}{\sqrt{\hat{V}(e_0)}} = \frac{(Y_0 - \hat{Y}_0) - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1 + \underline{C}^T(X^T X)^{-1}\underline{C})}}$$

רווח חיזוי ל- Y_0 (תצפית עתידית):

$$Y_0 \in \hat{Y}_0 \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}\left(e_0\right)} = \underline{C}^T\underline{\hat{\beta}} \pm t_{n-k-1,1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{MSE\left(1 + \underline{C}^T\left(X^T X\right)^{-1}\underline{C}\right)}$$

השוואה בין מודל מלא ומודל חלקי באמצעות מבחן "F חלקי":

מודל חלקי (RM)- בעל p מקדמים (p=k+1)

מודל מלא (FM)- בעל /+p מקדמים

/- מספר המשתנים אותם נבחן להוצאה מהמודל

$$F_{1\dots l|l+1\dots l+p-1} = \frac{[SSR(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+l}) - SSR(X_1,\dots,X_k)]/l}{SSE(X_1,\dots,X_k,X_{k+1},\dots,X_{k+l})/(n-p-l)}$$
$$= \frac{[SSR(FM) - SSR(RM)]/l}{MSE(FM)} \sim F_{l,n-k-1}$$

<u>מדדים לטיב מודל:</u>

1. <u>מדד R^2</u> - $R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$
2. <u>מדד R^2_{adj}</u> - $R^2_{adj} = 1 - \frac{SSE/(n-p)}{SST/(n-1)}$
3. <u>מדד AIC</u> (מודל רגרסיה) - $AIC = -2\log(L) + 2p = n\,ln(SSE/n) + 2p$
4. <u>מדד BIC</u> (מודל רגרסיה) - $BIC = -2\log(L) + ln(n)p = n\,ln(SSE/n) + ln(n)p$

<u>LOF</u>

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \hat{Y}_j)^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2 + \sum_{j=1}^{m} n_j(\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2$$
$$SSE = SSPE + SSLF$$

$$F_{st} = \frac{MSLF}{MSPE} = \frac{SSLF/(m-2)}{SSPE/(n-m)} \geq F^{1-\alpha}_{m-2,n-m}$$

<u>רגרסיה לוגיסטית</u>

$\pi = \pi(X)$ - הסתברות להצלחה כתלות בווקטור המשתנים המסבירים X

המודל: $\log\left(\frac{\pi(X_i)}{1-\pi(X_i)}\right) = X_i\beta$

<u>בדיקת השערות לבדיקת ההשערה שחלק מה β הן 0:</u>

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_l = 0$

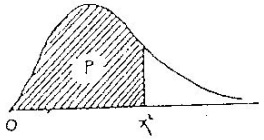
$H_1: ELSE$

<u>מבחן LRT</u>

הסטטיסטי הוא $\chi^2_{st} = Dev(RM) - Dev(FM) \sim \chi^2_l$ כאשר $Dev = -2\log(L(\hat{\beta}))$

<u>מבחן Wald</u>: סטטיסטי מבוסס על תבניות ריבועיות של האומדים שברוח משפט קוקרן מפולגות חי בריבוע

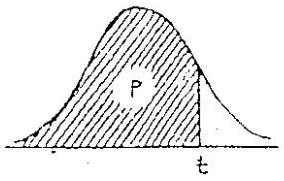
התפלגות חי-בריבוע (נגוף הטבלה רבי χ^2)



ד.ח. \ P	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	$.0^{4}393$	$.0^{3}157$	$.0^{3}982$	$.0^{3}393$	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

ח 2

לגות t של סטודנט (בגוף הטבלה - ערכי t)



ד.ח. \ P	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom (df_2) \ Numerator Degrees of Freedom (df_1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	9.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	6.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

F - Distribution ($\alpha = 0.05$ in the Right Tail)

Denominator Degrees of Freedom (df_2) \ Numerator Degrees of Freedom (df_1)	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
2	19.396	19.413	19.429	19.446	19.454	19.462	19.471	19.479	19.487	19.496
3	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.5720	8.5494	8.5264
4	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.7170	5.6877	5.6581	5.6281
5	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.3650
6	4.0600	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	2.9782	2.9130	2.8450	2.7740	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.6090	2.5705	2.5309	2.4901	2.4480	2.4045
12	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.3410	2.2962
13	2.6710	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	2.6022	2.5342	2.4630	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.1040	2.0584	2.0107	1.9604
18	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	2.3779	2.3080	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.8780
20	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	2.3210	2.2504	2.1757	2.0960	2.0540	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.9380	1.8894	1.8380	1.7831
23	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.0050	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.7570
24	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.9390	1.8920	1.8424	1.7896	1.7330
25	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.7110
26	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.9010	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	2.1900	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	1.9926	1.9174	1.8364	1.7480	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.4290	1.3519	1.2539
∞	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.3940	1.3180	1.2214	1.0000